Gazdasági matematika 2 előadás

Aradi Bernadett

2020 tavasz

A kurzushoz tartozó oktatási anyagok:
https://arato.inf.unideb.hu/aradi.bernadett

Témakörök

1. Lineáris algebra
   - Az $\mathbb{R}^n$ tér
   - Mátrixok, determinánsok
   - Lineáris egyenletrendszerek
   - Lineáris transzformációk
   - Kvadratikus formák, euklideszi terek
2. Valószínűségszámítás
   - Kombinatorika
   - Valószínűségi mező

Az $\mathbb{R}^n$ tér

Legyen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definíció – az $\mathbb{R}^n$ tér

Az $\mathbb{R}^n$ (vektor)tér:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \text{ minden } i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ esetén}\}.$$

Ekkor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy pont vagy vektor $\mathbb{R}^n$-ben, azaz a valós szám n-esek terében.

Továbbá $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Definíció – műveletek $\mathbb{R}^n$-ben

Összeadás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Skalárral való szorzás. Ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Példa. $\mathbb{R}^2$: a sík vektorai. Elemei: (x_1, x_2) alakú számpárok, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Műveletek tulajdonságai, altér

Állítás – a műveletek tulajdonságai

Összeadás. Legyen $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Létezik egy $0 \in \mathbb{R}^n$ nullvektor, valamint minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz egy $-v$-vel jelölt ún. ellentett vektor, melyekre

$$(u+v)+w = u+(v+w) \quad \text{(asszociativitás)}$$
$$v+w = w+v \quad \text{(kommutativitás)}$$
$$v+0 = v \quad \text{és} \quad v+(-v) = 0.$$

Skalárral való szorzás. Ha $v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor

$$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \quad \text{és} \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w,$$
$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \text{és} \quad 1v = v.$$

Definíció – altér

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy nemüres W részhalmazát altérnek nevezzük, ha zárt a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

Példák:

1. $\mathbb{R}^n$-ben $\{0\}$ és $\mathbb{R}^n$ mindig altér. Ezeket triviális altereknek nevezzük.
2. Ha $\mathbb{R}^2$-ben v tetsz. rögzített vektor, $W = \{\lambda v \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ altér.

Példák alterekre

$\mathbb{R}^2$ összes altere:

- $\{0\}$
- Az origón áthaladó egyenesek.
- $\mathbb{R}^2$ (a teljes sík).

$\mathbb{R}^3$ összes altere:

- $\{0\}$
- Az origón áthaladó egyenesek.
- Az origón áthaladó síkok.
- $\mathbb{R}^3$ (a teljes tér).

Mik lesznek $\mathbb{R}$, azaz a valós számegyenes alterei?

Lineáris kombináció

Definíció – lineáris kombináció

Az $\mathbb{R}^n$ tér $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorainak lineáris kombinációi a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k; \qquad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

alakú ($\mathbb{R}^n$-beli) vektorok.

Megj.: A nullvektor mindig előáll ún. triviális lineáris kombinációként, azaz csupa nulla együtthatókkal: $\lambda_i = 0$.

Példák:

1. Egy rögzített $v \neq 0$ vektor lineáris kombinációi: λv alakú vektorok.
2. $v = (2, 1), w = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$.
   A sík mely pontjai kaphatók meg v és w lineáris kombinációjaként?

Tétel és definíció – generált (vagy kifeszített) altér

Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ vektorrendszer összes lineáris kombinációi alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, melyet a vektorrendszer által generált altérnek, a $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorok lineáris lezártjának, vagy a vektorok által kifeszített altérnek nevezünk.
Jele: $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$.

Lineáris függőség, függetlenség

Vektorrendszer: $\mathbb{R}^n$ vektorainak egy halmaza. (Itt: véges halmaz.)

Definíció – lineáris függőség, függetlenség

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ vektorrendszerét lineárisan függőnek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nem mind 0 skalárok, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0.$$

Azaz ha a nullvektor nemtriviálisan is kikombinálható a vektorrendszer tagjaiból. Ellenkező esetben a vektorrendszer lineárisan független.

Megjegyzés

A lineárisan független esetben tehát a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

vektoregyenlet csak úgy állhat fenn, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Példa: $v = (2, 1), w = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$; v és w függetlenek-e?

Lineáris függőség, függetlenség

Tétel

$\mathbb{R}^n$-ben egy legalább kételemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamely tagja előáll a többi tag lineáris kombinációjaként, tehát ha

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k,$$

valamilyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k$ valós számokkal.

Következmények

1. Ha egy vektorrendszerben egy vektor egy másiknak skalárszorosa, akkor a vektrorrendszer lineárisan függő.
2. Ha a nullvektor benne van egy vektorrendszerben, akkor az függő, tehát lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.
3. Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor maga a vektorrendszer is az. Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

Bázis, dimenzió

Tétel

Ha $\mathbb{R}^n$-ben tekintünk egy n elemű, lineárisan független vektorrendszert, akkor a vektorrendszer által generált altér a teljes $\mathbb{R}^n$ tér.

Azaz minden vektor előáll a vektorrendszer tagjaiból képzett lineáris kombinációként.

Definíció – bázis, dimenzió

Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely n darab lineárisan független vektorát $\mathbb{R}^n$ bázisának nevezzük. Az n számot az $\mathbb{R}^n$ tér dimenziójának is mondjuk.
Tehát: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

- Ha a $\mathcal{B}$ vektorrendszer bázis, akkor $\mathbb{R}^n$ minden eleme pontosan egyféleképpen kombinálható ki lineárisan $\mathcal{B}$ elemeiből.
- $\mathbb{R}^n$-nek több (végtelen sok) bázisa van.

Példák bázisra

1. $\mathbb{R}^n$ egy bázisa: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, a természetes (vagy kanonikus) bázis.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathbb{R}^2$ természetes bázisa: $\{e_1, e_2\}$, ahol $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$.

   Másik bázis: $\{v, w\} = \{\binom{2}{1}, \binom{0}{3}\}$.

Bázisra vonatkozó koordináták

Bázis $\mathbb{R}^n$-ben: n darab lineárisan független vektor

Definíció – bázisra vonatkozó koordináták

Legyen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ egy bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor a fentiek szerint $\forall v \in \mathbb{R}^n$ egyértelműen kombinálható lineárisan $\mathcal{B}$ vektoraiból, azaz egyértelműen léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalárok, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Ezeket a skalárokat a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Ekkor v alakja a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tehát egy bázis megadása ekvivalens egy koordináta-rendszer megadásával.

Mátrixok

Definíció – mátrix

Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot $m \times n$-es mátrixnak nevezünk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A \text{ elemei: } a_{ij} \qquad A = (a_{ij})$$

Az összes $m \times n$-es mátrix halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$-nel jelöljük.

Definíció – mátrixokhoz kapcsolódó alapfogalmak

- Ha $n = m$, akkor a mátrix négyzetes vagy kvadratikus.
- Egy mátrix főátlója alatt az $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk})$ szám k-ast értjük ($k = \min\{m, n\}$).
- Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak (azaz ugyanannyi soruk és oszlopuk van), és a megfelelő elemeik megegyeznek.
- Azon $n \times n$-es mátrixot, melynek főátlójában csupa 1-es áll, minden más eleme 0, n-edrendű vagy n-dimenziós egységmátrixnak nevezzük. Jele: E_n vagy I_n.

Mátrixműveletek

1. Mátrixok összeadása

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.
Legyenek $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $m \times n$-es mátrixok.
Ekkor $C = A + B$, ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

2. Mátrixok skalárral való szorzása

Elemenként végezzük, azaz ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, akkor $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Speciálisan: ha A és B sor-, vagy oszlopvektorok, akkor a fenti 2 művelet éppen a vektorok szokásos összeadása és skalárral való szorzása.

3. Mátrixszorzás

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times k$, $B = (b_{ij})$ pedig egy $k \times n$ típusú mátrix.
Ekkor A és B szorzata az a $C = (c_{ij})$ $m \times n$ típusú mátrix, amelyre

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}.$$

Tétel – a mátrixszorzás tulajdonságai

- Ha A $m \times n$ típusú, akkor $E_m \cdot A = A$ és $A \cdot E_n = A$.
- Legyenek A, B mátrixok és tegyük fel, hogy létezik AB. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Ha A, B, C olyan mátrixok, hogy AB és BC létezik, akkor $(AB)C = A(BC)$. Azaz a mátrixszorzás asszociatív.
- Ha A és B azonos típusú mátrixok és létezik AC, akkor BC is létezik és $(A + B)C = AC + BC$. Azaz teljesül a disztributivitás.
- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$.

Definíció – mátrix transzponáltja

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix. Azt az A^T-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai A transzponáltjának nevezzük.

Állítás – a transzponálás tulajdonságai

- $(A^T)^T = A$. Azaz a transzponálás involutív művelet.
- A transzponálás és a mátrixszorzás kapcsolata: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Definíció – szimmetrikus, ferdeszimmetrikus mátrix

Legyen A egy n-edrendű kvadratikus mátrix (azaz $n \times n$-es).

- A szimmetrikus, ha $A^T = A$,
- A ferdeszimmetrikus, ha $A^T = -A$.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Itt A szimmetrikus, B ferdeszimmetrikus mátrix.

Állítás – szimmetrikus és ferdeszimmetrikus mátrixok tulajdonságai

- Ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.
- Szimmetrikus mátrixok összege szimmetrikus.
- Ferdeszimmetrikus mátrixok összege ferdeszimmetrikus.
- Szimmetrikus mátrixok szorzata nem feltétlenül szimmetrikus.

Mátrixok inverze

Definíció – mátrix invertálhatósága

Azt mondjuk az A n-edrendű négyzetes mátrixról, hogy invertálható, vagy létezik az inverze, ha létezik olyan B n-edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$AB = BA = E_n.$$

Tétel

Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A^{-1}.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Állítás – a mátrixinvertálás tulajdonságai

- Ha A invertálható, akkor A^{-1} is az és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ha A és B invertálható és létezik AB, akkor ez is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Ha A invertálható, akkor A^T is az és $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Determinánsok, előkészítés

Determináns: négyzetes mátrixhoz rendelt valós szám.

Definíció – permutációk inverziói

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és jelölje σ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációját, azaz legyen

$$\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}, \ i \mapsto \sigma(i)$$

bijektív függvény. (Itt $\sigma(i)$ jelöli a permutációban az i. helyen álló elemet.) Azt mondjuk, hogy a σ permutációnál az i és j elem inverzióban áll, ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$. Egy σ permutáció páros, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és páratlan, ha ez a szám páratlan.

Példa: Halmaz: $\{1, 2, 3, 4\}$

$\sigma_1 = (1, 3, 4, 2)$	Inverziók száma: 2
$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$	Inverziók száma: 0
$\sigma_3 = (4, 3, 2, 1)$	Inverziók száma: 6
$\sigma_4 = (2, 3, 4, 1)$	Inverziók száma: 3

Determinánsok

Definíció – determináns

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$-es mátrix. Az A mátrix n^2 db eleméből válasszunk ki úgy n elemet, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet választunk. A kiválasztott elemek alakja:

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}.$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Ez az összeg $n!$ tagú. Itt: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan.} \end{cases}$

Példa:

1. $n = 2$: $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
2. $n = 3$: $\det(A) = \dots$.

Tétel – a determinánsok szorzástétele

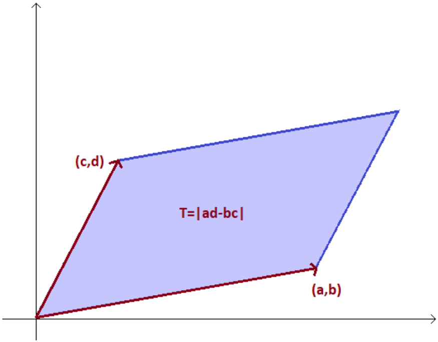
Ha A és B azonos rendű négyzetes mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A determináns szemléletes jelentése

- másodrendű (2x2-es) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



- harmadrendű (3x3-as) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

Állítás – a determináns tulajdonságai

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Ha A valamely sora csupa 0 elemből áll, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A két sorát felcseréljük, a determináns -1-szeresére változik.
- Ha A két sora egyenlő, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A valamely sorát megszorozzuk egy λ valós számmal, akkor az így kapott mátrix determinánsa $\lambda \cdot \det(A)$.
- Ha A minden sorát megszorozzuk egy λ számmal és A n-edrendű, akkor a kapott mátrix determinánsa $\lambda^n \cdot \det(A)$.
- Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor $\det(A) = 0$.
- Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ-szorosát.
- Ha A valamely sora előállítható a többi sor lináris kombinációjaként, akkor $\det(A) = 0$.
- A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

Következmény

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor A sorai (vagy oszlopai) lineárisan független vektorok. Ekkor ha A $n \times n$-es: sorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

Speciális alakú mátrixok determinánsa

Állítás

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az egységmátrix determinánsa 1.

$$\det(E_n) = 1$$

Állítás

Legyen A egy felső háromszög alakú mátrix, azaz olyan kvadratikus mátrix, melynek főátlója alatt csupa nulla szerepel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ekkor A determinánsa éppen a főátlóbeli elemek szorzata.

A determináns kapcsolata az invertálással

Definíció – mátrixok regularitása

Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix szinguláris, ha determinánsa 0. Ellenkező esetben (azaz ha $\det(A) \neq 0$) A reguláris.

Tétel

Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris.

Megjegyzés: Legyen A egy reguláris mátrix. Mivel $A \cdot A^{-1} = E$, ahol E az A-val azonos méretű egységmátrix, ezért a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

A fenti egyenletből következik, hogy A és A^{-1} determinánsa egymás reciproka:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

A determináns kiszámítási módjai

1. Sarrus-szabály: 2×2-es és 3×3-as mátrixok determinánsára
2. Gauss-elimináció: bizonyos – a fenti tulajdonságokat használó – átalakítások révén a mátrixot felső háromszög alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ekkor a determináns éppen a főátlóbeli elemek szorzata. Ezek az átalakítások:
   - sorcsere, ekkor a determináns előjelet vált;
   - $\lambda \in \mathbb{R}$ kiemelése egy sorból;
   - egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
3. Kifejtési tétel: Legyen A egy n-edrendű mátrix.
   - Kiválasztjuk A egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát),
   - ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal,
   - majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns $(-1)^{i+j}A_{ij}$, ahol A_{ij} annak az $(n-1)$-edrendű determinánsnak az értéke, amelyet A-ból az i. sor és j. oszlop kihúzásával kapunk.

Vektorrendszer rangja

Definíció – altér dimenziója

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy altere k dimenziós, ha tartalmaz k lineárisan független vektort, de $k+1$ darabot már nem.

Definíció – vektorrendszer rangja

Tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{A}$ vektorrendszerét. Az $\mathcal{A}$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója:

$$\text{rang}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{A})).$$

Példa: $\mathbb{R}^3$-ban legyen $\mathcal{A} = \{u, v, w\}$, ahol

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $w = 2u + v$, ezért w benne van a másik 2 vektor által generált altérben. Viszont u és v lineárisan független, ezért $\text{rang}(\mathcal{A}) = 2$.

Megjegyzés: Tekintsük $\mathbb{R}^n$ egy vektorrendszerét: $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $\text{rang}(\mathcal{A}) \leq n$ és $\text{rang}(\mathcal{A}) \leq m$.

Ranginvariáns átalakítások

Tétel – ranginvariáns átalakítások

Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha

- valamelyik vektort megszorozzuk egy nem-nulla skalárral;
- valamelyik vektorhoz hozzáadjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát;
- elhagyunk a vektorrendszerből olyan vektort, mely a többi vektor lineáris kombinációja.

Definíció – mátrix rangja

Egy mátrix rangja alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: $\mathrm{rang}(A)$.

Tehát egy $m \times n$ típusú mátrix rangja legfeljebb m és n közül a kisebbik.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció – lineáris egyenletrendszer

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

alakú egyenletrendszert, ahol az a_{ij} $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ és a b_k $(k \in \{1, \ldots, m\})$ valós számok ismertek, $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlenek, lineáris egyenletrendszernek nevezzük.

- a_{ij}: az egyenletrendszer együtthatói
- b_k: szabad tagok, vagy konstansok
- az egyenletrendszer alapmátrixa, ill. kibővített mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja: $Ax = b$.

Definíció – a megoldhatósággal kapcsolatos elnevezések

A lineáris egyenletrendszer

- megoldható, ha van megoldása, azaz létezik olyan $(x_1, \ldots, x_n)$ vektor, hogy $Ax = b$ fennáll;
  - határozott, ha pontosan 1 megoldása van;
  - határozatlan, ha több megoldása van;
- ellentmondásos, ha nincs megoldása.

Tétel – rangkritérium

- Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$.
- Ha megoldható és $\text{rang}(A) = n$ (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha $\text{rang}(A) < n$, akkor határozatlan.

Lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmaza

Definíció – lineáris egyenletrendszer homogenitása

A lineáris egyenletrendszer homogén, ha $b = 0$, azaz ekkor mátrixos alakja $Ax = 0$. Egyébként a lineáris egyenletrendszer inhomogén.

Megjegyzés: egy homogén lineáris egyenletrendszernek a nullvektor mindig megoldása.

Állítás – homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben, melynek dimenziója $n - \text{rang}(A)$. Ezt az alteret megoldástérnek nevezzük.

Állítás – inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Ha $Ax = b$ megoldható, akkor megoldáshalmaza $x_0 + H$ alakú, ahol

- x_0 a lineáris egyenletrendszer egy rögzített megoldása;
- H a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer (azaz $Ax = 0$) megoldástere.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval

Lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa: sorok $\approx$ egyenletek.

Nem változik a lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha:

- egyenletet (sort) szorzunk $\lambda \neq 0$-val;
- egyenlethez (sorhoz) hozzáadjuk egy másik egyenlet (sor) λ-szorosát;
- megcserélünk két egyenletet (sort);
- elhagyunk olyan egyenletet (sort), mely egy másiknak skalárszorosa.

Egyenletrendszer kibővített mátrixa $\rightsquigarrow$ trapéz alak (főátló alatt csupa 0), innen visszahelyettesítéssel adódnak a megoldások.

- Ha elimináció közben $(0 \ldots 0| \neq 0)$ sor adódik, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.
- Ha az elimináció végén n sor marad, akkor az egyenletrendszer határozott, ha kevesebb, akkor határozatlan.

Példa:

$$\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 1 \\ 2x + 9y - z &= -3 \\ -2x - 10y + 16z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lineáris transzformációk

Ebben a részben rögzítjük n-et, és az $\mathbb{R}^n$ térben fogunk dolgozni. Feltesszük, hogy adott ebben a térben egy bázis, és minden vektornak erre a bázisra vonatkozóan adottak a koordinátái.

Definíció – lineáris transzformáció

Legyen adott egy A $n \times n$-es mátrix. Az

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; v \mapsto Av$$

leképezést az $\mathbb{R}^n$ tér egy lineáris transzformációjának hívjuk. (Azaz a v vektort megszorozzuk balról az A négyzetes mátrixszal.)
Ezt a transzformációt gyakran φ_A-val jelöljük, azaz $\varphi_A(v) = Av$.

Példák:

- Forgatások, tükrözések, λ-nyújtások.
- Vetítések, pl. $\mathbb{R}^3$ egy rögzített, origón áthaladó síkjára merőlegesen.

Forgatások és tükrözések mátrixa $\mathbb{R}^2$-ben a természetes bázisban:

$$\mathrm{rot}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathrm{refl}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

A λ-nyújtás mátrixa $\mathbb{R}^n$-ben a természetes bázisban: λE_n.

Lineáris transzformációk tulajdonságai

Lineáris transzformációk tulajdonságai

Minden lineáris transzformáció

- additív, azaz $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$: $A(v+w) = Av + Aw$;
- homogén, azaz $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $A(\lambda v) = \lambda Av$.

Megjegyzés: lineáris transzformációnál nullvektor képe nullvektor.

Tétel – lineáris transzformációk alaptétele

Egy lineáris transzformációt egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása. Tehát ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tetszőleges vektorai $\mathbb{R}^n$-nek, akkor egyértelműen létezik olyan A $n \times n$ mátrix, hogy $Ab_i = w_i$. Továbbá ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén

$$Av = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n,$$

ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n$.

Állítás

A $v \mapsto Av$ lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha A reguláris, azaz $\det(A) \neq 0$. Ekkor a transzformáció bázist bázisba visz.

Példa lineáris transzformációk kompozíciójára

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^2$-ben szeretnénk alkalmazni a következő lineáris transzformációt:

- tükrözzük a vektort az x-tengellyel 30°-ot bezáró (origón áthaladó) egyenesre;
- a tükörképnek vegyük az ellentettjét, valamint ennek kétszeres nagyítottját;
- a kapott vektort vetítsük le merőlegesen az y-tengelyre.

Hogy néz ki az így kapott lineáris transzformáció?

$$(x,y) \mapsto \mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y) \mapsto -2(\mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y)) \mapsto \mathrm{proj}_y\left(-2(\mathrm{refl}_{30^\circ}(x,y))\right)$$

Mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Így a kapott transzformáció:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}x + y \end{pmatrix}, \text{ azaz } (x,y) \mapsto (0, -\sqrt{3}x + y).$$

Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

Definíció – sajátérték, sajátvektor

Tekintsünk $\mathbb{R}^n$-ben egy A mátrixszal adott lineáris transzformációt. Egy nem-nulla $v \in \mathbb{R}^n$ vektort A sajátvektorának hívunk, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $Av = \lambda v$. Ekkor λ-t a transzformáció v-hez tartozó sajátértékének mondjuk.

Példák: sajátvektorok forgatás, tükrözés, λ-nyújtás esetén.

Megjegyzések:

- Ha v sajátvektora A-nak, akkor a hozzá tartozó sajátérték egyértelmű.
- Ha λ sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátvektorok halmaza altér: $L_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$ altér $\mathbb{R}^n$-ben: a λ-hoz tartozó sajátaltér.

Definíció és tétel

- Egy A lineáris transzformáció (vagy mátrix) karakterisztikus polinomja a $\det(A - \lambda E_n)$ n-edfokú polinom, ahol n a tér dimenziója.
- Ennek gyökei éppen a lineáris transzformáció sajátértékei.
- A sajátértékek szorzata éppen a mátrix determinánsa.

Példa: Határozzuk meg az alábbi lin. trf. sajátértékeit és sajátvektorait!

$$(x, y) \mapsto (2x - y, -12x + 3y)$$

Kvadratikus függvények

Kvadratikus: négyzetes, másodfokú (akár többváltozós) függvények.

Definíció – kvadratikus függvény

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, és $\mathbb{R}^n$ elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor a

$$Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto Q(x) := x^T A x$$

függvényt kvadratikus függvénynek vagy kvadratikus formának nevezzük.

Alkalmazás: Közgazdaságtani modellekben: költségfüggvény, profitfüggvény gyakran kvadratikus.

Példa: Mi $\mathbb{R}^3$-ban az A mátrix által meghatározott kvadratikus függvény?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Általában az n-változós kvadratikus alak:

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{nn} x_n^2$$

Kvadratikus formák definitsége

Definíció – definitség

Egy Q kvadratikus függvény, valamint az őt definiáló A mátrix

- pozitív definit, ha $Q(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén;
- pozitív szemidefinit, ha $Q(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén;
- negatív definit, ha $Q(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén;
- negatív szemidefinit, ha $Q(x) \leq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén;
- indefinit, ha $Q(x)$ felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Tétel

A $Q(x) = x^T Ax$ kvadratikus függvény pontosan akkor

- pozitív definit, ha A összes sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≥ 0;
- negatív definit, ha A összes sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha A összes sajátértéke ≤ 0;
- indefinit, ha A-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

Definitség eldöntése a determináns segítségével

Tétel

Tekintsük ismét az A szimmetrikus mátrixból származó Q kvadratikus formát, és jelölje Δ_k az A mátrix bal felső k-adrendű sarokdeterminánsát (vagy sarokfőminorát), azaz

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \Delta_n = |A|.$$

A Q kvadratikus függvény pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\Delta_k > 0$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén;
- negatív definit, ha $(-1)^k \Delta_k > 0$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

A: pozitív definit, B: negatív definit

Euklideszi terek

Definíció – Skaláris (vagy belső) szorzat

Legyen A egy $n \times n$-es szimmetrikus, pozitív definit mátrix, és $\mathbb{R}^n$ elemeit tekintsük a természetes bázisban felírt oszlopvektorokként. Ekkor az

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y$$

mennyiséget az x és y vektorok skaláris vagy belső szorzatának nevezzük. Az $\mathbb{R}^n$ teret ellátva egy $\langle\, , \rangle_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénnyel (skaláris szorzattal) euklideszi térnek mondjuk. Jele: $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_A)$.

Megjegyzés: Ha A egyértelmű, akkor $\langle\, , \rangle_A$ helyett írhatunk $\langle\, , \rangle$ -t.

Példák: (1) Mi $\mathbb{R}^3$-ban az A mátrix által meghatározott skaláris szorzat?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbb{R}^2$-ben az egységmátrix választásával:

$$\langle x, y \rangle_E = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \text{ ha } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$$

Ez ugyanaz, mint amikor $\langle x, y \rangle = |x||y| \cos \angle$.

További példák; a skaláris szorzat tulajdonságai

Az előző oldali (2) általánosítása tetszőleges dimenzióra:

(3) Tekintsünk $\mathbb{R}^n$-ben két vektort (a természetes bázisban felírva): $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Ekkor a 2 vektornak az $n \times n$ típusú egységmátrix által meghatározott skaláris szorzata:

$$\langle x, y \rangle = x^T E_n y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

A (3) példában szereplő skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$ kanonikus vagy természetes skaláris szorzatának hívjuk.

Skaláris szorzat tulajdonságai

Tekintsünk egy A szimmetrikus, pozitív definit mátrix által meghatározott $\langle \, , \, \rangle$ skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor ez a skaláris szorzat

(a) első változójában additív: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(b) első változójában homogén: $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(c) szimmetrikus: $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$;

(d) pozitív definit: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle \geq 0$, és $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

- (a)+(b) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat első változójában lineáris
- $\dots$+(c) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat a második változójában is lineáris

Vektorok normája euklideszi terekben

Definíció – vektorok normája (hossza)

Tekintsünk egy $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi teret, ahol a skaláris szorzatot az A mátrix származtatja. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor normája vagy hossza

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T A x}.$$

Megj.: a gyökvonás elvégezhető az A mátrix pozitív definitsége miatt.

Példa: $\mathbb{R}^2$-ben a kanonikus belső szorzat esetén: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|$.

Tétel – a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

Az $\mathbb{E} = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi tér tetszőleges x, y vektoraira

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha x és y egymás skalárszorosa.

Definíció – vektorok által bezárt szög

Legyen x és y az $\mathbb{E}$ euklideszi tér 2 nem-nulla vektora. Ekkor az x és y által bezárt szög

$$\arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Vektorok ortogonalitása

Skaláris szorzat lényege

Skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-en $\rightsquigarrow$ szögmérés, távolságmérés!

Megj.: Ha x vagy y nullvektor, akkor a bezárt szögük definíció szerint $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Definíció – ortogonalitás

- Azt mondjuk, hogy x és y merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle x, y\rangle = 0$. Jelölés: $x \perp y$.
- Azt mondjuk, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, ha $\|x\| = 1$.

Megj.: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $\frac{x}{\|x\|}$ egységvektor.

Állítás

Legyen e egységvektor. Ekkor $\langle x, e\rangle$ az x vektor e-re eső merőleges vetületének a hossza, $\langle x, e\rangle e$ pedig x-nek az e-re eső merőleges vetülete.

Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Tekintsük most a természetes skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ teret.

Definíció – ortogonális mátrix

Egy négyzetes Q mátrix ortogonális, ha $Q^{-1} = Q^T$.

Tétel – ortogonalitással ekvivalens állítások

Egy négyzetes Q mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:

- A Q mátrix ortogonális.
- $Q \cdot Q^T = E$.
- Q sorai páronként merőleges egységvektorok.
- Q oszlopai páronként merőleges egységvektorok.

Tétel – szimmetrikus mátrixok sajátértékei

Legyen A négyzetes szimmetrikus mátrix, azaz $A^T = A$. Ekkor

- A sajátértékei (a $\det(A - \lambda E_n) = 0$ egyenlet gyökei) valós számok.
- A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.
- A-hoz létezik olyan Q ortogonális mátrix, hogy $Q^{-1}AQ$ diagonális alakú (azaz a főátlóján kívül minden elem nulla), és a főátlóban éppen A sajátértékei vannak.

Valószínűségszámítás – bevezetés

Valószínűségszámítás tárgya: véletlen jelenségek, véletlen kísérletek vizsgálata.

Véletlen jelenség vagy véletlen esemény alatt azt értjük, amikor a (figyelembevehető) körülmények nem határozzák meg egyértelműen a jelenség kimenetelét.
Kísérlet: több alkalommal lényegében azonos módon megismételhető.

- Egy kísérlettel kapcsolatos eseményeknek fogunk valószínűséget tulajdonítani.
- Leszámlálási problémák megoldásához szükségünk van a kombinatorikai fogalmakra.

Kombinatorika – Permutáció

Definíció – permutáció

Legyen A egy halmaz n különböző elemmel ($n \in \mathbb{N}$). A egy permutációján egy, az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz és A közötti bijektív leképezést értünk, azaz az A elemeinek valamilyen sorrendben való felsorolását.

Jelölje P_n az A halmaz összes permutációinak számát.

- Ekkor $P_1 = 1$.
- Belátjuk, hogy $P_n = n \cdot P_{n-1}$.
  Az n elemű halmazból rögzítünk egy elemet. A maradék $n-1$ elemet P_{n-1}-féleképpen rendezhetjük sorba, majd a rögzített elemet n helyre sorolhatjuk be. Így $P_n = n \cdot P_{n-1}$, azaz $P_n = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n!$.

Tétel

n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek a száma $P_n = n!$.

Példák: (1) Hányféleképpen érhet célba 10 futó egy futóversenyen?
(2) Hány 5-jegyű szám írható fel a 3,4,5,7,9 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet? És a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Ismétléses permutáció

Hány 5-jegyű szám írható fel a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Megoldás: Ha megkülönböztetnénk egymástól a ketteseket és a heteseket, akkor 5! lenne a sorrend, viszont a kettesek illetve a hetesek cserélgetésével nem kapunk új 5-jegyű számot. $\Rightarrow$ Az ismétlődő elemek lehetséges sorrendjeivel osztanunk kell az 5!-t, azaz a végeredmény:

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Tétel

Ha n elemünk van k különböző fajtából, az 1. fajtából ℓ_1, a 2.-ból ℓ_2, stb. (azaz $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k = n$), akkor az n elem lehetséges sorrendjeinek a száma

$$P_n^{\ell_1,\dots,\ell_k} = \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_k!}$$

Ismétléses perm.: n elem sorbarendezése, melyek között vannak azonosak.

Példa: Van 7 különböző színű, de egyébként egyforma bögrénk: 2 sárga, 1 zöld, 1 lila és 3 kék. Hányféleképpen rakhatjuk sorba a bögréket a konyhaszekrényben?

Variáció

Variáció: kiválasztás és sorbarendezés.

Definíció és tétel – ismétlés nélküli variáció

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli variációi alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1).$$

Itt szükségképpen $n \geq k$.

$\Rightarrow$ Olyan kiválasztás, ahol számít a sorrend.

Példák:

(1) Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések egy 10 fős futóversenyen?

(2) Egy nyereménysorsoláson 5 különböző díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $\rightsquigarrow$ visszatevés nélküli mintavétel

És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba"? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás

Ismétléses variáció

Definíció és tétel – ismétléses variáció

Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációi alatt a halmaz elemeiből *visszatevéssel* kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V^i_{n,k} = n^k.$$

Ismétléses variáció: kiválasztás és sorbarendezés, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt?

(2) Hány részhalmaza van egy k elemű halmaznak?

Megoldás: Minden elem esetén döntünk arról, hogy igen (1) vagy nem (0), azaz bekerüljön-e az elem a részhalmazba, vagy nem.

Tehát a 2 lehetőségből k-szor választunk visszatevéssel.

Így az összes részhalmaz megkapható. Összesen $V^i_{2,k} = 2^k$ lehetőség.

A részhalmazok megfelelnek a k hosszúságú bináris sorozatoknak:

$$1001\ldots110.$$

Kombináció

Kombináció: kiválasztás. (Sorrend nem számít.)

Definíció és tétel – ismétlés nélküli kombináció

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Számuk:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}.$$

Definíció szerint $0! = 1$.
Itt szükségképpen $n \geq k$.

Példák:

(1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt?

(2) Egy nyereménysorsoláson 5 *egyforma* díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet? $\rightsquigarrow$ visszatevés nélküli mintavétel
És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba"? $\rightsquigarrow$ visszatevéses kiválasztás

Ismétléses kombináció

Definíció és tétel – ismétléses kombináció

Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk. Számuk:

$$C^i_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció: kiválasztás, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

(1) Hányféleképpen oszthatunk szét 10 (egyforma) almát 4 ember között?

(2) Feldobva 3 dobókockát, hányféleképpen alakulhat a dobott számok eloszlása? Megoldás: $n = 6, k = 3$, $C^i_{6,3} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56.$

Állítás

Legyen $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomiális tétel

Tétel – binomiális tétel

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(x+y)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \\ + \cdots + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{0}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Definíció – binomiális együttható

Az $\binom{n}{k}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük.

Megjegyzés: együtthatók a Pascal-háromszögben

Állítás

Minden $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ esetén

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Valószínűségi mező – bevezetés

A valószínűséget egy függvényként fogjuk interpretálni, ami eseményekhez hozzárendeli azok bekövetkezésének a valószínűségét. Ehhez először az értelmezési tartományt, azaz az eseményeket kell megadnunk.

- Szükséges matematikai struktúra: eseményalgebra.

Definíció – eseménytér, elemi események

Legyen Ω rögzített, nemüres halmaz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Ezt eseménytérnek, az elemeit pedig elemi eseményeknek nevezzük.

- Elemi események: egy kísérlet, vizsgált jelenség lehetséges kimenetelei.
- Események: Ω (bizonyos) részhalmazai, amiknek valószínűséget fogunk tulajdonítani.

Példa: Tekintsük a kockadobás kísérletét.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, ahol ω_k azt jelenti, hogy a dobás eredménye k.

$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \subset \Omega$ egy esemény: a dobás eredménye páros.

Példa: Számoljuk meg, hogy egy adott üzletben hányan vásárolnak egy rögzített napon. Ekkor $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$: a vizsgált napon 5-nél kevesebben vásároltak az üzletben.

Események

Definíció – esemény bekövetkezése

Az Ω eseménytér egy $A \subset \Omega$ eseménye bekövetkezik, ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény valósul meg és $\omega \in A$.
Ellenkező esetben, azaz ha ω a jelenség kimenetele és $\omega \notin A$, akkor azt mondjuk, hogy A nem következik be.

Példa: kockadobás, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.
Legyen $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ és $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ha 4-est dobunk, akkor az A esemény bekövetkezik, a B nem.

Definíció

Az $\emptyset$ üres halmaz, mint Ω részhalmaza a lehetetlen esemény, ez sohasem következik be.
Ω, amely maga az eseménytér, mindig bekövetkezik, ezt biztos eseménynek is nevezzük.

Műveletek eseményekkel

Definíció – műveletek eseményekkel

Tekintsünk egy Ω eseményteret, valamint ennek A, B részhalmazait.

- Az A esemény ellentett vagy komplementer eseménye az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.
- Az A és B események összege vagy uniója az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha a két esemény legalább egyike bekövetkezik. Jele: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események szorzata vagy metszete az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha mindkét esemény bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események különbsége az az esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, B nem. Jele: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

Állítás

Tekintve az A és B eseményeket $A - B = A \cdot \overline{B}$.

Kapcsolat az események között

Definíció – események közötti relációk

Tekintsünk egy Ω eseményteret, valamint ennek A, B részhalmazait.

- Az A és B események diszjunktak vagy egymást kizáró események, ha egyszerre nem következhetnek be.
- Az A esemény maga után vonja a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén szükségképpen B is bekövetkezik.
  Jele: $A \Rightarrow B$ vagy $A \subset B$.

Megj.: az A és B események diszjunkt volta azt jelenti, hogy szorzatuk a lehetetlen esemény: $A \cdot B = \emptyset$.

Állítás

Tekintve az A és B eseményeket a következők ekvivalensek:

$$A \Rightarrow B \qquad \text{és} \qquad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.$$

Példa: kockadobás, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$.
Legyen $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ és $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Ekkor $A \Rightarrow B$.

Eseményalgebra

Definíció – eseményalgebra

Tekintsünk egy Ω eseményteret. Ennek bizonyos részhalmazait akkor nevezzük eseményeknek, valamint ezen halmazok $\mathcal{A}$ halmazát eseményalgebrának, ha

- a biztos esemény esemény: $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ha A esemény, akkor az $\overline{A}$ komplementere is az:
  ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
- ha $A_1, A_2, \ldots$ események, akkor ezek uniója (összege) is esemény:
  ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

A fentiekből következik, hogy a lehetetlen esemény is esemény: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Példák eseményalgebrára.

- Tetszőleges Ω esetén $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.
- Tetszőleges Ω esetén $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.
- Kockadobás.
- Pénzérme feldobása.
- Pénzérme feldobása *n*-szer egymás után.
  - Vizsgálhatjuk a különböző dobássorozatokat.
  - Vizsgálhatjuk azt, hogy összesen hány fejdobás történt.
- Számoljuk meg, hogy egy adott üzletben hányan vásárolnak egy rögzített napon. Ekkor $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mi lehet itt az eseményalgebra?
- Legyen most a kísérlet az, hogy célbalövünk egy kör alakú céltáblára. Mik lehetnek itt az események, illetve az eseményalgebra? (Tegyük fel, hogy a céltáblát mindenképpen eltaláljuk.)

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Tekintsünk egy kísérlettel kapcsolatos A eseményt. Hajtsuk végre a kísérletet n-szer egymás után.

Definíció

Az A esemény gyakorisága az a szám, ahányszor az A esemény bekövetkezik az n kísérlet során. Jele: $k_n(A)$. Ekkor $k_n(A) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
Az A esemény relatív gyakorisága a bekövetkezések számának és n-nek a hányadosa:

$$r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}.$$

Tapasztalat: a kísérletek számának növelésével az A esemény $r_n(A)$ relatív gyakorisága tart egy (a $[0, 1]$ intervallumba eső) számhoz. Logikus ezt tekinteni A valószínűségének.

A relatív gyakoriság tulajdonságai

Állítás

Tekintsünk egy kísérletetet. Egy ezzel a kísérlettel kapcsolatos A esemény relatív gyakoriságát (n végrehajtás esetén) jelölje továbbra is $r_n(A)$. Ekkor

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$;
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$;
- ha A és B egymást kizáró események, akkor
$$r_n(A + B) = r_n(A) + r_n(B);$$
- ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást páronként kizáró események, akkor
$$r_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(r_n(A_i));$$
- $r_n(\overline{A}) = 1 - r_n(A)$;
- ha $A \Rightarrow B$, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

Valószínűségi mező

Legyen Ω egy nemüres halmaz, az eseménytér, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ pedig (Ω bizonyos részhalmazaiból álló) eseményalgebra.

Definíció

Tekintsünk egy $P\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

(1) $P(A) \geq 0$, tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ egymást páronként kizáró események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (P(A_i)).$$

Ez a valószínűség σ-additivitása.

Ekkor P-t valószínűségnek vagy valószínűségi függvénynek, $P(A)$-t pedig az A esemény valószínűségének mondjuk.
Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast valószínűségi mezőnek hívjuk.

A valószínűség további tulajdonságai

Tétel

Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt. A P valószínűségi függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

- $P(\emptyset) = 0$.
- P (végesen) additív, azaz ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- P monoton: ha $A \Rightarrow B$ (azaz $A \subset B$), akkor $P(A) \leq P(B)$.
- Tetszőleges A és B események esetén
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Diszkrét valószínűségi mező

Definíció

Az Ω eseményteret, valamint az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt diszkrétnek mondjuk, ha Ω megszámlálható halmaz, tehát véges: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, vagy megszámlálhatóan végtelen: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, továbbá $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

Állítás és definíció

Diszkrét valószínűségi mezőben a

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

számok (azaz az elemi események valószínűségei) egyértelműen meghatározzák a P valószínűségi függvényt.
Ekkor a fenti valószínűségek nemnegatívak: $p_i \geq 0$, és összegük 1, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\sum_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Ekkor a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok eloszlást alkotnak.

Példa: szabályos, ill. „szabálytalan” dobókocka esete.

Klasszikus valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező klasszikus valószínűségi mező, ha Ω véges, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

$\mathcal{A} = 2^\Omega$, továbbá minden elemi esemény egyenlően valószínű.

Ekkor a valószínűségi függvény tulajdonságai miatt

$$P(\omega_i) := P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Állítás

Klasszikus valószínűségi mezőben egy k elemű A esemény valószínűsége kiszámítható a

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$$

képlettel, ahol $n = |\Omega|$.

Geometriai valószínűségi mező

Ha az eseményteret $\mathbb{R}^n$ egy véges részhalmazával tudjuk beazonosítani, az elemi események pedig „egyenletesen oszlanak el” ezen a halmazon, akkor geometriai valószínűségi mezőről beszélünk.

Állítás

Geometriai valószínűségi mezőben egy $A \subset \Omega$ halmaz valószínűsége A mértékével arányos, azaz

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ a halmaz mértékét jelöli, tehát például

- $n = 1$ dimenzió esetén μ a hossz,
- $n = 2$ dimenzió esetén μ a terület,
- $n = 3$ dimenzió esetén μ a térfogat.

Példa: Egy 1 méter hosszú rudat találomra kettétörünk. Mekkora a valószínűsége, hogy a 2 kapott darabból, valamint egy fél méter hosszúságú rúdból egy háromszöget tudunk összerakni?